Décomposition isotrope déviatoire en grandes transformations - Cisaillement simple

D. Caillerie[1,2]
1. Univ. Grenoble - Alpes , L3SR , F38000 GRENOBLE FRANCE
2. CNRS , L3SR , F38000 GRENOBLE FRANCE
Domaine Universitaire BP 53
38041 GRENOBLE cedex 9, FRANCE
Denis.Caillerie@3sr-grenoble.fr

1 Décomposition isotrope déviatoire

En petites transformations les déformations d'un milieu continu sont données par le tenseur symétrique

$$\epsilon = \frac{1}{2}\left(\nabla\vec{u} + \nabla\vec{u}^t\right)$$

Il est usuel de décomposer ce tenseur en partie isotrope $\epsilon^i\mathbb{I}$ ($\mathbb{I}$ est l'application identité) et déviatoire ϵ^d par :

$$\epsilon = \epsilon^I\mathbb{I} + \epsilon^D \text{ avec } \operatorname{tr}\epsilon^D = 0 \tag{1}$$

Ce qui signifie que la déformation déviatoire ϵ^D n'induit aucun changement de volume, la partie isotrope $\epsilon^I\mathbb{I}$, correspond (localement) à une homothétie de rapport $\epsilon^I = \frac{\operatorname{tr}\epsilon}{3}$ ($\frac{\operatorname{tr}\epsilon}{2}$ à deux dimensions) qui prend en compte tout le changement de volume induit par ϵ.

En grandes transformations, les décompositions additives comme (1) n'ont pas de sens, en effet, en petites transformations on compose les transformations en ajoutant les déplacements alors qu'en grandes transformations on compose les placements qui donnent la position des points matériels d'une configuration à une autre.

Dans le cas des grandes transformations le tenseur décrivant les changements de distances entre points voisins est le tenseur de Green $C = F^T \circ F$ (voir MMC-HMG-Cours.pdf §3.2 p.27. Les déformations sont définies par C ou par le tenseur de déformation à droite $U = C^{1/2}$ de la décomposition polaire (voir MMC-HMG-Cours.pdf §3.3.3 P.31) :

$$F = R \circ U \tag{2}$$

Le changement de volume est donné par le déterminant J de F, c'est-à-dire que si dV est un volume infinitésimal autour d'un point de la configuration de référence, le volume dv occupé dans la configuration déformée par les points matériels se trouvant, dans la configuration de référence, dans le volume dV est d$v = J$dV (voir MMC-HMG-Cours.pdf §3.2.2.2 p.29).

Une façon d'étendre la décomposition *isotrope-déviatoire* aux grandes déformations est de décomposer U en :

$$U = J^{1/d}\mathbb{I} \circ \left(\frac{1}{J^{1/d}}U\right) \tag{3}$$

où d est la dimension du problème (2 ou 3).

On pose :

$$\hat{U} = \frac{1}{J^{1/d}}U \tag{4}$$

$\hat{U}$ correspond à une déformation sans changement de volume (local) en effet, R étant une rotation son déterminant vaut 1 et on a :

$$J = \det F = \det R \, \det U = \det U$$

et, par conséquent :

$$\det \hat{U} = \det \left(\frac{1}{J^{1/d}}U\right) = \left(\frac{1}{J^{1/d}}\right)^d \det U = 1 \tag{5}$$

De même qu'en petites déformations, le tenseur $J^{1/d}\mathbb{I}$ correspond à une homothétie, ici de rapport $J^{1/d}$. Tout le changement de volume de la transformation est pris en compte par $J^{1/d}\mathbb{I}$.

En fonction de $\hat{U}$, F s'écrit :

$$F = J^{1/d}R \circ \hat{U} \tag{6}$$

1.1 Développements autour de la configuration de référence

Le déplacement du milieu de la cnfiguration initiale, prise comme référence, vers la configuration déformée est

$$\vec{u}\left(\vec{X}\right) = \vec{\varphi}\left(\vec{X}\right) - \vec{X}$$

la fonction « placement » $\vec{\varphi}$, « deformation function » in english, est définie et étudiée dans MMC-HMG-Cours.pdf § 3.4.2 p.19 et suivantes).

On en déduit

$$F = \mathbb{I} + \nabla_X \vec{u}$$

Dans ce paragraphe, on étudie le cas où $\|\nabla_X \vec{u}\| << 1$ (voir MMC-HMG-Cours.pdf §3.2.2.2 p.37). En particulier on développe J et $\hat{U}$.

On montre (voir MMC-HMG-Cours.pdf §3.4.3 p.38) que R et u de la décomposition polaire (2) se développe en

$$
\begin{aligned}
R &= \mathbb{I} + \omega + \cdots \\
U &= \mathbb{I} + \epsilon + \cdots
\end{aligned}
$$

où $\omega = \frac{1}{2}\left(\nabla_X \vec{u} - \nabla_X \vec{u}^T\right)$ et $\epsilon = \frac{1}{2}\left(\nabla_X \vec{u} + \nabla_X \vec{u}^T\right)$ sont les parties antisymétrique et symétrique de $\nabla_X \vec{u}$. On peut se convaincre de ce résultat en remarquant que

$$(\mathbb{I} + \omega + \cdots)(\mathbb{I} + \epsilon + \cdots) = \mathbb{I} + \epsilon + \omega + \cdots$$

c'est-à-dire

$$(\mathbb{I} + \omega + \cdots)(\mathbb{I} + \epsilon + \cdots) = F + \cdots$$

On a $J = \det(\mathbb{I} + \nabla_X \vec{u})$ qui se développe pour $\nabla_X \vec{u}$ petit en

$$J = 1 + \operatorname{tr} \nabla_X \vec{u} + \cdots$$

soit

$$J = 1 + \operatorname{div}_X \vec{u} + \cdots = 1 + \operatorname{tr} \epsilon + \cdots$$

Des développements de J et U on déduit ceux de $J^{1/3}\mathbb{I}$ et $\hat{U} = \frac{1}{J^{1/3}} U$. On a

$$
\begin{aligned}
J^{1/3}\mathbb{I} &= (1 + \operatorname{div}_X \vec{u} + \cdots)^{1/3}\, \mathbb{I} \\
&= \mathbb{I} + \frac{1}{3} \operatorname{div}_X \vec{u}\mathbb{I} + \cdots
\end{aligned}
$$

soit, compte tenu de (1)

$$J^{1/3}\mathbb{I} - \mathbb{I} = \epsilon^I \mathbb{I} + \cdots$$

où ϵ^I est la partie isotrope de ϵ. On a d'autre part

$$\hat{U} = \frac{1}{(1 + \operatorname{tr} \epsilon + \cdots)^{1/3}} (\mathbb{I} + \epsilon + \cdots)$$

ce qui donne

$$\hat{U} = \left(1 - \frac{1}{3} \operatorname{tr} \epsilon + \cdots\right)(\mathbb{I} + \epsilon + \cdots)$$

soit

$$\hat{U} = \mathbb{I} + \left(-\frac{1}{3} \operatorname{tr} \epsilon \mathbb{I} + \epsilon\right) + \cdots$$

soit encore, compte tenu de (1)

$$\hat{U} = \mathbb{I} + \epsilon^D + \cdots$$

où ϵ^D est la partie isotrope de ϵ.