Décomposition isotrope déviatoire en grandes transformations - Cisaillement simple

D. Caillerie[1,2]
1. Univ. Grenoble - Alpes , L3SR , F38000 GRENOBLE FRANCE
2. CNRS , L3SR , F38000 GRENOBLE FRANCE
Domaine Universitaire BP 53
38041 GRENOBLE cedex 9, FRANCE
Denis.Caillerie@3sr-grenoble.fr

1 Décomposition isotrope déviatoire

En petites transformations les déformations d'un milieu continu sont données par le tenseur symétrique

$$\epsilon = \frac{1}{2}\left(\nabla\vec{u} + \nabla\vec{u}^t\right)$$

Il est usuel de décomposer ce tenseur en partie isotrope $\epsilon^i\mathbb{I}$ ($\mathbb{I}$ est l'application identité) et déviatoire ϵ^d par :

$$\epsilon = \epsilon^I\mathbb{I} + \epsilon^D \text{ avec } \operatorname{tr}\epsilon^D = 0 \tag{1}$$

Ce qui signifie que la déformation déviatoire ϵ^D n'induit aucun changement de volume, la partie isotrope $\epsilon^I\mathbb{I}$, correspond (localement) à une homothétie de rapport $\epsilon^I = \frac{\operatorname{tr}\epsilon}{3}$ ($\frac{\operatorname{tr}\epsilon}{2}$ à deux dimensions) qui prend en compte tout le changement de volume induit par ϵ.

En grandes transformations, les décompositions additives comme (1) n'ont pas de sens, en effet, en petites transformations on compose les transformations en ajoutant les déplacements alors qu'en grandes transformations on compose les placements qui donnent la position des points matériels d'une configuration à une autre.

Dans le cas des grandes transformations le tenseur décrivant les changements de distances entre points voisins est le tenseur de Green $C = F^T \circ F$. Les déformations sont définies par C ou par le tenseur de déformation à droite $U = C^{1/2}$ de la décomposition polaire :

$$F = R \circ U \tag{2}$$

Le changement de volume est donné par le déterminant J de F.

Une façon d'étendre la décomposition *isotrope-déviatoire* aux grandes déformations est de décomposer U en :

$$U = J^{1/d}\mathbb{I} \circ \left(\frac{1}{J^{1/d}} U \right) \tag{3}$$

où d est la dimension du problème (2 ou 3).

On pose :

$$\hat{U} = \frac{1}{J^{1/d}} U \tag{4}$$

$\hat{U}$ correspond à une déformation sans changement de volume (local) en effet, R étant une rotation son déterminant vaut 1 et on a :

$$J = \det F = \det R \, \det U = \det U$$

et, par conséquent :

$$\det \hat{U} = \det \left(\frac{1}{J^{1/d}} U \right) = \left(\frac{1}{J^{1/d}} \right)^d \det U = 1 \tag{5}$$

De même qu'en petites déformations, le tenseur $J^{1/d}\mathbb{I}$ correspond à une homothétie, ici de rapport $J^{1/d}$. Tout le changement de volume de la transformation est pris en compte par $J^{1/d}\mathbb{I}$.

En fonction de $\hat{U}$, F s'écrit :

$$F = J^{1/d} R \circ \hat{U} \tag{6}$$

La décomposition du tenseur de Greeen correspondante est (comme U, $\hat{U}$ est symétrique) :

$$C = U^2 = J^{1/d}\mathbb{I} \circ \hat{U} \circ J^{1/d}\mathbb{I} \circ \hat{U} = \left(J^{2/d}\mathbb{I} \right) \circ \hat{U}^2$$

soit en posant $\hat{C} = \hat{U}^2$:

$$C = \left(J^{2/d}\mathbb{I} \right) \circ \hat{C}$$

soit aussi :

$$\hat{C} = \frac{1}{J^{2/d}} C \tag{7}$$

On a évidemment

$$\det \hat{C} = \left(\det \hat{U} \right)^2 = 1$$

1.1 Différentiation de $\hat{U}$ et $\hat{C}$

Pour déterminer la différentielle de $\hat{U}$ en fonction d'un incrément δF de F, on commence par différencier différencie la décomposition polaire $F = R \circ U$, cela donne :

$$\delta F = \delta R \circ U + R \circ \delta U$$

soit, en posant $\Omega = \delta R \circ R^T$:

$$\delta F = \Omega \circ F + R \circ \delta U \tag{8}$$

R étant une isométrie, ω est antisymétrique. ω dépend de $\nabla_x \vec{u}$ mais pas de facçon simple sauf si $F = \mathbb{I}$. On différencie ensuite la relation (4) :

$$\delta \hat{U} = -\frac{1}{J^{1/d+1}} \delta J \, U + \frac{1}{J^{1/d}} \delta U + \cdots$$

or :

$$\begin{aligned} \delta J &= \det\left(F + \delta F\right) - J \\ &= \det\left(F \circ \left(\mathbb{I} + F^{-1} \circ \delta F\right)\right) - J \\ &= J\left(\det\left(\left(\mathbb{I} + F^{-1} \circ \delta F\right)\right) - 1\right) \end{aligned}$$

ce qui se développe en :

$$\delta J = J\left(1 + \operatorname{tr}\left(F^{-1} \circ \delta F\right) + \cdots - 1\right)$$

c'est-à-dire :

$$\delta J = J \operatorname{tr}\left(F^{-1} \circ \delta F\right) + \cdots$$

d'où :

$$\delta \hat{U} = -\frac{1}{J^{1/d}} \operatorname{tr}\left(F^{-1} \circ \delta F\right) U + \frac{1}{J^{1/d}} \delta U + \cdots$$

soit :

$$\delta \hat{U} = \frac{1}{J^{1/d}} \left(\delta U - \operatorname{tr}\left(F^{-1} \circ \delta F\right) U\right) + \cdots \tag{9}$$

On considère le cas où l'incrément δF est dû à un incrément $\delta \vec{\varphi}$ de la fonction placement $\vec{\varphi}$ du milieu continu. Ce $\delta \vec{\varphi}$ correspond à un petit déplacement $\vec{u}$ du point matériel $\vec{X}$ (position du point matériel dans la configuration de référence du milieu) par rapport à sa position $\vec{x} = \vec{\varphi}\left(\vec{X}\right)$.

On a :

$$F = \nabla_X \vec{\varphi}$$

et par conséquent :

$$\delta F = \nabla_X \delta \vec{\varphi} = \nabla_X \vec{u}$$

En considérant $\vec{u}$ comme une fonction de $\vec{x}$, on a :

$$\delta F = \nabla_X \vec{u} = \nabla_x \vec{u} \circ \nabla_X \vec{\varphi} = \nabla_x \vec{u} \circ F$$

On continue le calcul dans le cas où $\vec{\varphi}\left(\vec{X}\right) = \vec{X}$, ce qui simplifie grandement l'affaire. On a $F = R = U = \mathbb{I}$ et $J = 1$ d'où :

$$\delta F = \nabla_x \vec{u}$$

(8) devient :

$$\nabla_x \vec{u} = \Omega + \delta U$$

comme δU est symétrique et ω antisymétrique, on en déduit :

$$\delta U = \epsilon = \frac{\nabla_x \vec{u} + \nabla_x \vec{u}^T}{2}$$
$$\Omega = \omega = \frac{\nabla_x \vec{u} - \nabla_x \vec{u}^T}{2}$$

De (9) on obtient l'expression de $\delta \hat{U}$:

$$\delta \hat{U} = (\epsilon - \operatorname{tr} \nabla_x \vec{u} \mathbb{I}) + \cdots$$

c'est-à-dire :

$$\delta \hat{U} = \epsilon^D$$

2 Cisaillement simple

2.1 Petites déformations

En petites déformations, un tenseur de déformation est par définition un tenseur de cisaillement simple s'il a deux valeurs propres (déformations principales) opposées (et la troisième nulle en dimension 3). En dimension 2 tout tenseur déviatoire (donc de trace nulle) est un cisaillement simple car $\operatorname{tr} \epsilon = \epsilon_1 + \epsilon_2$, ϵ_1 et ϵ_2 étant les déformations principales. En dimension 3, ce n'est plus le cas en général mais tout tenseur de cisaillement simple est déviatoire. D'autre part, tout tenseur des déformations déviatoire peut être décomposé en somme de deux tenseurs de cisaillement simple en effet, dans une base $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ propre du tenseur des déformations ϵ, la matrice de la partie déviatoire ϵ^D de ϵ s'écrit :

$$\underline{\underline{\epsilon}}^D = \begin{pmatrix} \epsilon_1^D & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_2^D & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_3^D \end{pmatrix} \text{ avec } \epsilon_1^D + \epsilon_2^D + \epsilon_3^D = 0$$

On peut donc écrire $\epsilon_2^D = -\epsilon_1^D - \epsilon_3^D$ et par conséquent :

$$\underline{\underline{\epsilon}}^D = \begin{pmatrix} \epsilon_1^D & 0 & 0 \\ 0 & -\epsilon_1^D & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\epsilon_3^D & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_3^D \end{pmatrix}$$

ce qui montre que ϵ^D est la somme de deux cisaillement simple :

$$\epsilon^D = \epsilon_1^D \left(\vec{e}_1 \otimes \vec{e}_1 - \vec{e}_2 \otimes \vec{e}_2\right) + \epsilon_3^D \left(-\vec{e}_2 \otimes \vec{e}_2 + \vec{e}_3 \otimes \vec{e}_3\right)$$

Il est clair que cette décomposition n'est pas unique car on peut aussi bien écrire $\epsilon_1^D = -\epsilon_2^D - \epsilon_3^D$ et :

$$\epsilon^D = \epsilon_2^D \left(-\vec{e}_1 \otimes \vec{e}_1 + \vec{e}_2 \otimes \vec{e}_2\right) + \epsilon_3^D \left(-\vec{e}_1 \otimes \vec{e}_1 + \vec{e}_3 \otimes \vec{e}_3\right)$$

.

En dimension 3, la matrice d'un cisaillement simple dans la base propre $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ est :

$$\underline{\underline{\epsilon}} = \begin{pmatrix} \epsilon & 0 & 0 \\ 0 & -\epsilon & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ce qui signifie que la déformation correspondante n'induit aucun changement de volume ($\mathrm{tr}\,\epsilon = 0$) et que la changement de longueur du matériau dans la direction $\vec{e}_2$ est l'opposé du changement de longueur dans la direction $\vec{e}_1$.

2.2 Grandes déformations

2.2.1 Une définition du cisaillement simple

Une façon de généraliser ces caractéristiques de cisaillement simple au cas des grandes transformations est de définir le cisaillement simple comme l'état de déformation pour lequel $J = 1$ (pas de changement local de volume) et 1 est valeur propre de U (U de la décomposition polaire $F = R \circ U$). Dans sa base propre $\{\vec{c}_1, \vec{c}_2, \vec{c}_3\}$, la matrice de U s'écrit donc :

$$\underline{\underline{U}} = \begin{pmatrix} \upsilon & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\upsilon} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{10}$$

ce qui donne pour C dans la même base :

$$\underline{\underline{C}} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\gamma} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

où $\gamma = \upsilon^2$.

Les vecteurs $\mathrm{d}L\vec{c}_1$ et $\mathrm{d}L\vec{c}_2$ joignant respectivement les points matériels de positions dans la configuration de référence $\vec{X}$ et $\vec{X} + \mathrm{d}L\vec{c}_1$ et $\vec{X}$ et $\vec{X} + \mathrm{d}L\vec{c}_2$ se transforment respectivement en $\upsilon \mathrm{d}L\vec{c}_1$ et $\frac{1}{\upsilon}\mathrm{d}L\vec{c}_2$. Si $\upsilon = 1 + \epsilon$ avec ϵ petit alors les allongements du matériau dans les directions $\vec{c}_1$ et $\vec{c}_2$ sont donnés par $\upsilon \mathrm{d}L\vec{c}_1 - \mathrm{d}L\vec{c}_1$ et $\frac{1}{\upsilon}\mathrm{d}L\vec{c}_2 - \mathrm{d}L\vec{c}_2$ soit, à l'ordre 1 en ϵ, $\epsilon \mathrm{d}L\vec{c}_1$ et $-\epsilon \mathrm{d}L\vec{c}_2$. Ce qui correspond aux allongements dûs à un cisaillement simple en petites transformations. Une autre façon de voir cela est de développer U à l'ordre 1 en ϵ, ce qui donne, compte tenu du développement $\frac{1}{1+\epsilon} = 1 - \epsilon + \cdots$:

$$\underline{\underline{U}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \epsilon & 0 & 0 \\ 0 & -\epsilon & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \cdots$$

A deux dimensions la matrice de U dans sa base propre est :

$$\underline{\underline{U}} = \begin{pmatrix} \upsilon & 0 \\ 0 & \frac{1}{\upsilon} \end{pmatrix}$$

et, d'après le paragraphe 1 tout tenseur des déformations à droite se décompose multiplicativement en une déformation isotrope $J^{1/d}\mathbb{I}$ et un cisaillement $\frac{1}{J^{1/d}}U$. Ces considérations sur les déformations des milieux bidimensionnels s'appliquent aux déformations surfaciques.

2.2.2 Décomposition d'un tenseur déviatoire en cisaillements simples

Soit U un tenseur de déformation ($U^T = U$) de déterminant égal à 1 (U conserve le volume). Soit $\{\vec{c}_1, \vec{c}_2, \vec{c}_3\}$ la base des directions principales de déformation, on a donc :

$$U = \sum_{i=1}^{3} \upsilon_i \vec{c}_i \otimes \vec{c}_i$$

soit matriciellement dans la base $\{\vec{c}_1, \vec{c}_2, \vec{c}_3\}$:

$$\underline{\underline{U}} = \begin{pmatrix} \upsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \upsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \upsilon_3 \end{pmatrix}$$

avec $\upsilon_1\upsilon_2\upsilon_3 = 1$. On peut écrire $\upsilon_2 = \frac{1}{\upsilon_1\upsilon_3}$, d'où :

$$\underline{\underline{U}} = \begin{pmatrix} \upsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\upsilon_1\upsilon_3} & 0 \\ 0 & 0 & \upsilon_3 \end{pmatrix}$$

ce qui se décompose en :

$$\underline{\underline{U}} = \begin{pmatrix} \upsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\upsilon_1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\upsilon_3} & 0 \\ 0 & 0 & \upsilon_3 \end{pmatrix}$$

Il est clair que, comme dans le cas des petites déformations, cette décomposition n'est pas unique.

2.2.3 Une autre définition du cisaillement

Ashburner et Friston [1] définissent a "shear" comme étant une linéaire transformation du type :

$$\underline{\underline{F}} = \begin{pmatrix} 1 & q_3 & q_2 \\ 0 & 1 & q_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On peut essayer de déterminer la décomposition polaire de cet F pour voir à quelle déformation il correspond.

On calcule $\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{F}}^T \underline{\underline{F}}$:

$$\underline{\underline{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ q_3 & 1 & 0 \\ q_2 & q_1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & q_3 & q_2 \\ 0 & 1 & q_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & q_3 & q_2 \\ q_3 & 1+q_3^2 & q_1+q_2q_3 \\ q_2 & q_1+q_2q_3 & 1+q_1^2+q_2^2 \end{pmatrix}$$

Tentative de diagonalisation

$$\underline{\underline{C}} - \lambda\underline{\underline{\mathbb{I}}} = \begin{pmatrix} 1-\lambda & q_3 & q_2 \\ q_3 & 1-\lambda+q_3^2 & q_1+q_2q_3 \\ q_2 & q_1+q_2q_3 & 1-\lambda+q_1^2+q_2^2 \end{pmatrix}$$

soit en posant $\mu = 1-\lambda$:

$$\underline{\underline{C}} - \lambda\underline{\underline{\mathbb{I}}} = \begin{pmatrix} \mu & q_3 & q_2 \\ q_3 & \mu+q_3^2 & q_1+q_2q_3 \\ q_2 & q_1+q_2q_3 & \mu+q_1^2+q_2^2 \end{pmatrix}$$

On a donc :

$$\begin{aligned} \det\left(\underline{\underline{C}} - \lambda\underline{\underline{\mathbb{I}}}\right) = \mu &\left(\left(\mu+q_3^2\right)\left(\mu+q_1^2+q_2^2\right) - \left(q_1+q_2q_3\right)^2\right) \\ &- q_3\left(q_3\left(\mu+q_1^2+q_2^2\right) - q_2\left(q_1+q_2q_3\right)\right) + q_2\left(q_3\left(q_1+q_2q_3\right) - q_2\left(\mu+q_3^2\right)\right) \end{aligned}$$

ce qui donne en développant :

$$\begin{aligned} \det\left(\underline{\underline{C}} - \lambda\underline{\underline{\mathbb{I}}}\right) = \mu &\left(\mu^2 + \mu\left(q_1^2+q_2^2+q_3^2\right)\right) + \mu\left(\left(q_1^2+q_2^2\right)q_3^2 - \left(q_1+q_2q_3\right)^2 - q_2^2 - q_3^2\right) \\ &- q_3^2\left(q_1^2+q_2^2\right) + q_2q_3\left(q_1+q_2q_3\right) + q_2q_3\left(q_1+q_2q_3\right) - q_2^2q_3^2 \end{aligned}$$

soit :

$$\begin{aligned} \det\left(\underline{\underline{C}} - \lambda\underline{\underline{\mathbb{I}}}\right) = \mu &\left(\mu^2 + \mu\left(q_1^2+q_2^2+q_3^2\right)\right) + \mu\left(q_3^2q_1^2 - 2q_1q_2q_3 - q_1^2 - q_2^2 - q_3^2\right) \\ &+ 2q_1q_2q_3 - q_1^2q_3^2 \end{aligned}$$

Ce qui est de la forme :

$$\det\left(\underline{\underline{C}} - \lambda\underline{\underline{\mathbb{I}}}\right) = \mu\left(\mu^2 + a\mu\right) - (a+b)\,\mu + b$$

soit :

$$\det\left(\underline{\underline{C}} - \lambda\underline{\underline{\mathbb{I}}}\right) = \mu^3 + a\mu^2 - (a+b)\,\mu + b$$

où on a posé :

$$\begin{aligned} a &= q_1^2+q_2^2+q_3^2 \\ b &= q_1q_3\left(2q_2 - q_1q_3\right) \end{aligned}$$

On remarque que si $b = 0$ alors $\mu = 0$, c'est-à-dire $\lambda = 1$, est solution de l'équation $\det\left(\underline{\underline{C}} - \lambda\underline{\underline{\mathbb{I}}}\right) = 0$. C'est seulement dans ce cas qu'il existe une direction principale de déformations pour laquelle il n'y a pas de changement de longueur, 1 est valeur propre de C donc aussi du tenseur des déformations U (de $F = R \circ U$) qui par conséquent est un cisaillement simple au sens de la définition 2.2.1.

A PART CELA, BOF BOF BOF J'ai essayé de déterminer les valeurs propres de C de façon générale à l'aide de Maxima, c'est horrible et inexploitable.

Références

[1] Ashburner J. & Friston K.J.. Rigid Body Registration. Chap. 2 de ? ? ?